ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.12 1981

В.В.Махоркин

# ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ФОКАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

В работе рассматриваются однопараметрические семейства невырожденных гиперквадрик в $P_n(\mathbb{C})$ и изучаются их фокальные многообразия первого порядка, которые интерпретируются как множество нулей сечений нормального расслоения гиперквадрики.

Пусть $M$ множество всех невырожденных гиперквадрик в $n$-мерном проективном пространстве над полем комплексных чисел. Множество $M$ естественным образом наделяется структурой комплексно-аналитического многообразия. Каждому $t \in M$ соответствует невырожденная гиперквадрика в $P_n(\mathbb{C})$, которую обозначим $Z_t$ $(Z_t \subset P_n(\mathbb{C}))$.

Рассмотрим отображение:

$$\pi : Z \longrightarrow M, \tag{1.1}$$

где $Z$ -комплексно-аналитическое многообразие, $\pi$ - сюрьективное голоморфное отображение, имеющее в каждой точке максимальный ранг равный размерности $M$, причем $\pi^{-1}(t)$ изоморфно $Z_t$ (см.[1]). Следуя [1], будем называть отображение (1.1) комплексно-аналитическим семейством невырожденных гиперквадрик в $P_n(\mathbb{C})$.

Многообразие $Z$ будем считать подмногообразием в $P_n(\mathbb{C}) \times M$ (см.[1]), тогда $\pi$ будет сужением $pr_2 : P_n(\mathbb{C}) \times M \to M$ на $Z$.

Обозначим через $G$ проективную группу $PGL(n,\mathbb{C})$. Группа $G$, голоморфно действуя на $P_n(\mathbb{C})$, действует



и на $M$, причем действие на $M$ также голоморфно. Определим действие $G$ на $P_n(\mathbb{C}) \times M$:

$$g \cdot (x,t) = (g \cdot x,\ g \cdot t), \tag{1.2}$$

где $g \in G$, $(x,t) \in P_n(\mathbb{C}) \times M$. Так как $Z \subset P_n(\mathbb{C}) \times M$, то $G$ голоморфно действует и на $Z$. Действия группы $G$ на $Z$ и $M$ продолжаются до действий на $TZ$ и $TM$ (голоморфные касательные расслоения к $Z$ и $M$ соответственно).

Пусть:

$$\rho_t : T_t M \longrightarrow \Gamma(Z_t, N_t) \tag{1.3}$$

-отображение инфинитезимальных перемещений (см.[1]). Здесь $T_t M$- касательное пространство к $M$ в точке $t$, $N_t$ -нормальное расслоение гиперквадрики $Z_t$ в $P_n(\mathbb{C})$, а $\Gamma(N_t, Z_t)$-пространство сечений нормального расслоения $N_t$.

Обозначим $H_t \subset G$ группу стационарности точки $t \in M$, которая совпадает с группой стационарности гиперквадрики $Z_t$. Группа $H_t$ действует на $T_t M$ и на $N_t$, действие $H_t$ на $N_t$ переносится на $\Gamma(Z_t, N_t)$ следующим образом:

$$(g \cdot s)(x) = g \cdot s(g^{-1} \cdot x), \tag{1.4}$$

здесь $x \in Z_t$, $g \in H_t$, а $s \in \Gamma(Z_t, N_t)$.

Теорема 1. Для всякого $t \in M$ отображение

$$\rho_t : T_t M \longrightarrow \Gamma(Z_t, N_t)$$

является $H_t$ -отображением.

Пусть $t_0 \in M$, а $U = \{\tau \in \mathbb{C} \mid |\tau| < \varepsilon\}$.

$$\varphi : U \to M \qquad (\varphi(0) = t_0) - \tag{1.5}$$

невырожденное голоморфное отображение. Отображение (1.5) индуцирует однопараметрическое семейство гиперквадрик $(\mathcal{Z}^*, \pi^*, U)$, причем диаграмма:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Z}^* \arrow[r] \arrow[d, "\pi^*"'] & \mathcal{Z} \arrow[d, "\pi^*"] \\ U \arrow[r, "\varphi"] & M \end{tikzcd} \tag{1.6}$$

коммутативна.

Будем говорить, что семейство $(\mathcal{Z}^*,\pi^*, U)$ проходит через точку $t_0$ или гиперквадрику $\mathcal{Z}_{t_0}$. Фокальное многообразие первого порядка гиперквадрики $\mathcal{Z}_{t_0}$ семейства $(\mathcal{Z}^*, \pi^*, U)$ определяется (см.[2]) в некоторой системе координат на $P_n(\mathbb{C})$ следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta}(\varphi(\tau))\Big|_{\tau=0} x^\alpha x^\beta &= 0, \\ \frac{d}{d\tau} a_{\alpha\beta}(\varphi(\tau))\Big|_{\tau=0} x^\alpha x^\beta &= 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

В работе[2] доказана проективная инвариантность фокального многообразия (1.7).

Т е о р е м а 2. Фокальное многообразие первого порядка гиперквадрики $\mathcal{Z}_{t_0}$ семейства $(\mathcal{Z}^*, \pi^*, U)$ совпадает с множеством нулей сечения $\rho_{t_0}(v)$, где $\rho_{t_0}$ -отображение (1.3), а $v = ((\varphi'(0))$. (1)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество нулей $\rho_{t_0}(v)$ определяется (см.[1]) системой (1.7). Очевидно, что любой $w \neq 0$ и $w=\lambda v$ (где $\lambda \neq 0$) также определяет многообразие (1.7). Таким образом, отображение инфинитезимальных перемещений позволяет поставить в соответствие каждому $v \in T_{t_0}M$ и $v \neq 0$ множество нулей сечения $\rho_{t_0}(v)$ -фокальное многообразие гиперквадрики $\mathcal{Z}_{t_0}$ семейства $(\mathcal{Z}^*, \pi^*, U)$ вдоль вектора $v$, которое будем обозначать $\mathcal{Z}_{t_0,v}$.

Т е о р е м а 3. Пусть $v \in T_{t_0}M$ и $w \in T_{t_0}M$, $g \in H_{t_0}$, если $w = g\cdot v$, тогда

$$g\cdot \mathcal{Z}_{t_0,v} = \mathcal{Z}_{t_0,w}.$$



Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in \mathcal{Z}_w$, тогда $(\rho_{t_0}(w))(x) = 0$, т.е. $(\rho_{t_0}(g\cdot v))(x) = 0$, т.к. $\rho_{t_0} - H_{t_0}$ —отображение, то:

$$(\rho_{t_0}(v))(g^{-1}x) = 0,$$

т.е. $g^{-1}\cdot x \in \mathcal{Z}_v$.

Аналогично доказывается обратное включение.

С л е д с т в и е. Однопараметрические семейства гиперквадрик, проходящие через $\mathcal{Z}_{t_0}$, имеют на $\mathcal{Z}_{t_0}$ не более $\operatorname{card}\Sigma$ неизоморфных относительно $H_{t_0}$ фокальных многообразий первого порядка, где $\Sigma$ множество орбит проективизации $T_{t_0}M$ относительно действия $G$.

## Список литературы


1. Kodaira K., Spencer D.C. On deformations of complex analytic structures. I,II Annals of Mathematics, 67, 1958.

2. М а х о р к и н В.В. Некоторые типы многообразий гиперквадрик.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3, Калининград, 1973, с.50-59.